2015.11.7
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

ゼロのゼロ乗とゼロ除算

定義　$a,p,q\in\mathbb{C}$（$a\neq0$）に対して二項演算を

$$a^p\cdot a^q=a^{p+q}$$

とする．このとき，

定理

$$0^0=0$$

が成り立つ.

証明　$q=-p$ とすると定義より，

$$a^p\cdot a^q=a^{p+(-p)}=a^{p-p}=a^0$$

である．ここで，$a=0$，$p=1$ とすると，この最右辺から

$$0^0=0^{1-1}=0^{1+(-1)}=0^1\cdot0^{-1}=0\cdot0=0$$

$$\therefore\quad 0^0=0$$

が成り立つ．■

なお，ここでの $0^{-1}=0$ はゼロ除算による.
また，次の関係式が成り立つことに注意する.

$$\lim_{x\to0}x^x=1 \qquad (\mathrm{I})$$

$$\lim_{x\to0}a^x=1 \quad (a\neq0) \quad (\mathrm{II})$$

$$\lim_{x\to0}x^0=1 \qquad (\mathrm{III})$$

つまり，(Ⅰ)，(Ⅱ)，(Ⅲ)にも拘わらず，上記定理が成り立つのであって，0^0 は強力な不連続性を以て 0 に定まることを意味している．そしてこの強力な不連続性は，$0^{-1}=0$ というゼロ除算の強力な不連続性に起因するものであることに注意を要する.