2015.11.17
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

テコの原理に見るゼロ除算と質点

どんなに細い有限細さのモノよりも細く，且つ，変形しない長さLの水平に置かれた棒を考える．この棒を長さ方向に内分する内分点をP_O，点P_Oから棒の一端点P_aまでの距離をa，点P_Oから棒の他端点P_bまでの距離をbとする．いま，点P_Oを支点として，点P_aに作用させる（鉛直下向きの）力を$\boldsymbol{F}_a$，これによって端点P_bに作用する力を$\boldsymbol{F}_b$とすれば（下図参照），この系のbに対するaのテコ比は,

$$\frac{a}{b} \qquad (1)$$

と表され，力$\boldsymbol{F}_b$の大きさ（簡単にスカラーとして考える）は,

$$F_b = \frac{a}{b} F_a \qquad (2)$$

で与えられる．ここで，$b \to 0$とすると，$\boldsymbol{F}_b \to \infty$となる．ところが，ゼロ除算の基本定理により，

$$b = 0 \Rightarrow F_b = 0 \qquad (3)$$

が成り立つ.

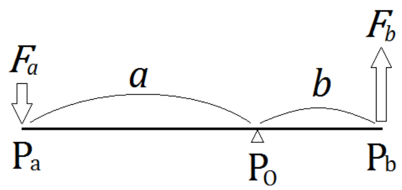

図　第１種テコの系

このことは，実験事実と一致する．即ちこれは，支点P_Oの位置を端点P_bに一致させたとき，端点P_aに幾ら大きな力$\boldsymbol{F}_a$を加えても，端点P_bに作用する力$\boldsymbol{F}_b$はゼロであると述べている．まして，$\boldsymbol{F}_b$が無限大になることが無いことは経験的に誰でも知っている通りである．(3)式は，端点P_bでは，b＝0のとき，作用する力$\boldsymbol{F}_b$やモーメントがゼロになることを意味しており，半径ゼロの点には，モーメントが生じないことを意味している．

ところで，定義より，a=L−bであるから，(2)式は,

$$F_b = \frac{L-b}{b} F_a \qquad (4)$$

と表される．b＝0とすれば,

$$F_b = \frac{L-b}{b} F_a = \frac{L-0}{0} F_a = \frac{L}{0} F_a = 0 \times F_a \qquad (5)$$

であるが，(4)式中の

$$F_b = \frac{L}{0} F_a \qquad (6)$$

において，L→0とすると，これは質点となる．また，(3)式を

$$F_a = \frac{b}{L - b} F_b \qquad (7)$$

と変形して，b＝0，即ち，

$$F_a = \frac{0}{L - 0} F_b \qquad (8)$$

としておき，L→0 とすると，これは質点となって明らかに，$\boldsymbol{F}_a$＝$\boldsymbol{F}_b$＝0 となることがわかる．このことは，質点に作用するモーメントがゼロであると解釈できる．□