2016.1.29

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

一般逆導関数積とゼロ除算

従前の逆導関数積は,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1 \quad (f\neq 0 \wedge f^{-1}\neq 0) \qquad (1)$$

で与えられる.

　しかし，この定義範囲のままでは，導関数が 0 のとき取り扱えない．そこで，(1)式を導関数が 0 のときにも適用可能なように拡張することを考える.

定理　次の関係が成り立つ.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{0}=\begin{cases}0 & (f=0)\\ 1 & (f\neq 0)\end{cases} \qquad (2)$$

証明

$$y=F \qquad (3)$$

とする．すると,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f \qquad (4)$$

であるから,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f^{-1} \qquad (5)$$

とおける．ここで，(4)式と(5)式の辺々をそれぞれ乗じると,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=f\cdot f^{-1}=f^{0}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{0}=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} \qquad (6)$$

を得る．つまり，$f\neq 0$ のとき，(6)式は，従来の

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=1 \quad (f\neq 0) \qquad (7)$$

となり，$f=0$ のとき，(7)式は成り立たないといえる．更には，$f=0$ のとき，$0^0=0$ を用いれば,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0 \quad (f=0) \qquad (8)$$

であると言える．つまり，(7)式と(8)式を合わせて,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\begin{cases}0 & (f=0)\\ 1 & (f\neq 0)\end{cases} \qquad (9)$$

が成り立つと言える．□