2016.1.3
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

連続体と１対１対応しない平行線，連続体と１対１対応する点
～平行な離散的連続点線の不思議～

０．序論

改めて連続とは何か？可算とは？非可算とは？長さとは何か？そして，点とは何か？を考えることには，多分に意味が有る．

連続とは，各点の周りに考えられる概念であり，どれだけ拡大しても隣接していて差が無く，

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

が成り立つことであるとされる．ただし，(1)式左辺は明らかに動数であるのに対して，右辺は明らかに静数であるから(1)式が厳密に成り立っているとは考え難いが，本論では，従前の(1)式の概念に従うものとする．

可算とは，対象とする集合の要素が，自然数の集合の要素との間において，一対一対応させることが出来ると言うことを意味する概念である．これに対して，非可算とは，対象とする集合の要素が，自然数の集合の要素との間において，一対一対応させることが出来ないことを意味する概念であり，数え上げることが出来ないことを意味する概念である．

また，長さとは始点から終点までの距離のことであるが，始点とはどこのことなのか？また終点とは？という疑問が湧くであろう．数直線上の或る長さを考えよう．$a<b$ として，数直線上の始点をいま a とし，終点を b とする．すると，ここで言うところの長さ L は，a 点から b 点までの距離 d に等しいと考えられる．すると，$L=b-a$ と表されることになる．果たして，これが厳密な長さであろうか．否．なぜなら，a 点と b 点の詳細を与えていないからである．長さとは，一般には，半開区間でなければならない．つまり，半開区間$[a,b)$又は,半開区間$(a,b]$でなければならない．より適正な長さとしての半開区間には，後者を用いるべきであろう．長さとして半開区間を選ばない場合，例えば，全閉区間$[a,b]$を 10 等分したとすると個々の長さは，元の長さの 1/10 に満たないことになる．従って，長さとしては，半開区間$(a,b]$を採用する．

こうしてみると，半開区間$(a,b]$というものは，a 点の直ぐ近傍の境界線がぼやけていることに気が付くであろう．つまり，半開区間$(a,b]$の区間長 L は，従前の形式に従って式にしてしまえば，$L=b-a$ と表される訳であるが，実際には１つの固定された長さに成っている訳ではないことが見て取れるであろう．それは，半開区間$(a,b]$の左端側は，a 点にどこまでも接近するが決して a 点に到達しないという条件になっていることによる．勿論，極限値は a であるというのは結構である．しかし，a には決して到達しないことは元々の条件である．

さて，最後に点について，少し触れて，序論を締め括ろう．ユークリッドの点は，現代数学のいうところの点と殆ど同じモノ，同じ概念であると言ってよいであろう．即ち，点とは，空間における位置を正確に規定するための概念であり，長さ，面積，体積，方向，傾きなど，位置以外のあらゆる特徴を持たない概念である．

以上のことを踏まえ，以下に，離散的連続点群という不思議な性質の線分について観てゆくこととしよう．

１．平行な離散的連続点線の作り方

次の操作を無数に繰り返して，或る平行線を作ることにしよう．

①xy 座標系において，x 軸上の 0 から 1 までの半開区間(0,1]の線分を引く．

②①の線分の中央の 1/3 長の半開区間(1/3,2/3]を切り離して所定間隔 d だけ y 軸方向上向きに平行移動させる．

③出来た分割線分のそれぞれの中央 1/3 長の同様な半開区間を切り離して x 軸上の分割線分は，y 軸方向上向きに d だけ，$y=d$ の分割線分は y 軸方向下向きに d だけ平行移動させる．

④③の操作を極限まで繰り返す．

以上①～④の操作によって，平行点線を得ることが出来る．

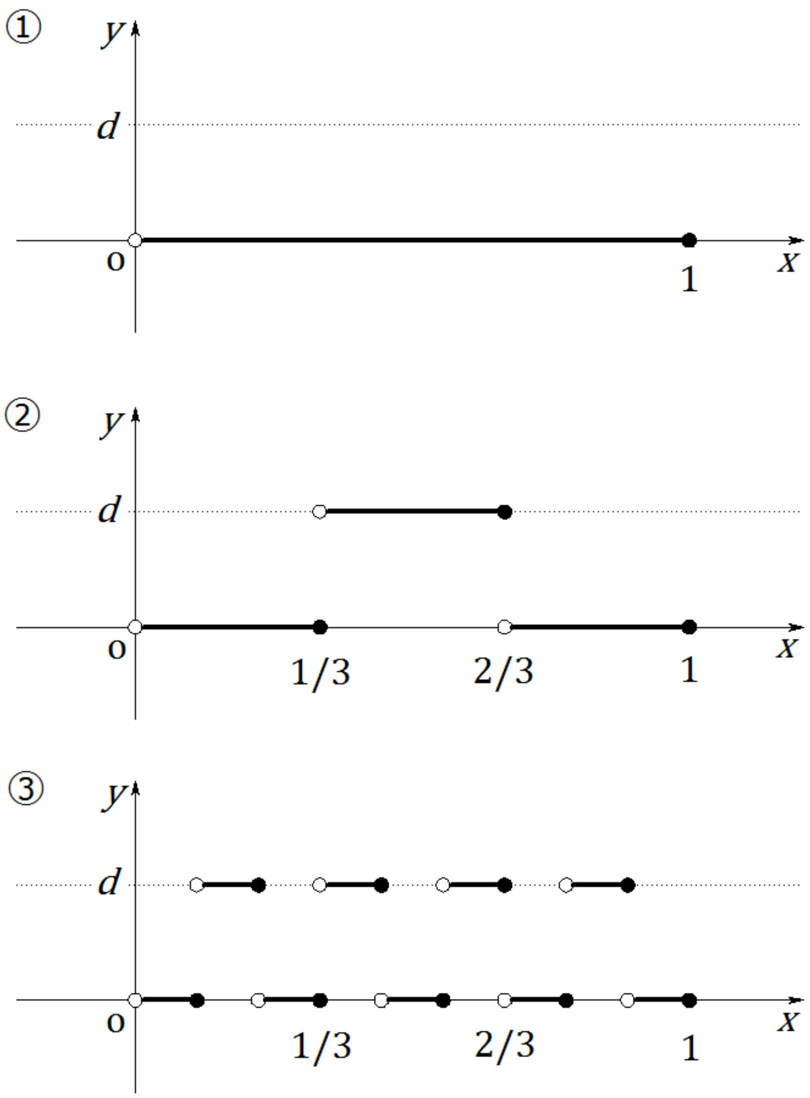

Fig.1　線分の分割による平行な離散的連続点線の作成手順

２．この平行点線について分析を加えながら性質を探る

①一度切断された分割線分の右端は，結合されない．

②一度切断された分割線分の右端は，再び切断されない．

③右端側を含む各分割線分は，一度 y 軸方向移動した後は，再移動されない．

④各分割線分は，右端に向かって短小化する（不動点）．

⑤n 回目の分割時の各分割線分の長さは，$1/3^n$（n＝0,1,2,3,⋯）である．

⑥n 回目の分割時の分割線分の総数は，3^n 本（n＝0,1,2,3,⋯）である．

⑦y＝0 の分割線分の数量は，y＝d の分割線分の数量よりも 1 本多い．

⑧全ての線分の右端点は，デデキントの切断定理により，（1/3 に係る）有理数点である．

⑨全ての線分の左端点は，デデキントの切断定理により，有理数点ではない．

⑩y＝0 の極限分割線分の総長さ L_0 は，次の式で表される．

$$L_0 = 1 - \frac{1}{3^1} + \frac{1}{3^2} - \frac{2}{3^2} + \frac{4}{3^3} - \frac{5}{3^3} + \cdots + \frac{\sum_{k=0}^{n-2} 3^k}{3^n} - \frac{1 + \sum_{k=0}^{n-2} 3^k}{3^n} + \cdots = \frac{1}{2}$$

⑪y＝d の極限分割線分の総長さ L_d は，次の式で表される．

$$L_d = \frac{1}{3^1} - \frac{1}{3^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^3} - \cdots - \frac{\sum_{k=0}^{n-2} 3^k}{3^n} + \frac{1 + \sum_{k=0}^{n-2} 3^k}{3^n} + \cdots = \frac{1}{2}$$

⑫y＝0 の極限分割線分の総長さ L_0 と，y＝d の極限分割線分の総長さ L_d の和 L は，次式で与えられる．

$$L = L_0 + L_d = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

⑬この平行点線は，何れも（特に y＝0）0 から 1 までの区間長 1 に渡って存在するにも拘わらず，総長さが 1/2 しかない．いや，1/2 もある．

⑭この平行点線は，何れも点線であるにも拘わらず，総長さが 1/2 もあるが，ユークリッドの点には大きさが無く，従って，この点線の個々の要素が点であるとすると，それらは全て右端の有理点であることになるが，有理点は連続体に対して 1 対 1 対応しない上，大きさのない有理点の総和が 1/2 にはならず，よって，点線の各点はユークリッドの点ではない．

⑮点線の総和長が，1 という区間長に対して，1/2 もあって非可算無限長あることになるが，至る所穴だらけで，その穴の箇所は対向する平行点線側に存在する点になっており，何れの点線も点の数量は可算無限個であって，半開区間(0,1]の線分中に含まれる有理数点の数を越えない．

⑯これらの点線には，高々可算無限個の極限分割線分しか存在しないので，カントールの定理によって，点線としては連続体と 1 対 1 対応しない．

⑰例えば，有理点 1/3 を含む分割線分の n 回分割時の区間は，

$$\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^n}, \frac{1}{3}\right]$$

であり，分割線分の極限分割時の区間は，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^n}, \frac{1}{3}\right] = \left(\frac{1}{3} - \hat{0}, \frac{1}{3}\right] \equiv \left\{\frac{1}{3}\right.$$

であって，半開区間は，半開点になることが判る．なぜなら，区間の一方が開いていることと，開いている側が，開いていない側に対して，$\hat{0}$ だけ x 軸方向に幅を持っているということは本質的に同じことを指しているからである．ただし，$\hat{0}$ は，どんな小さな正定数よりも小さく，0 より大きいことを表す無限小動数である．

なお，

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n},\frac{1}{3}\right]=\left(\frac{1}{3}-0,\frac{1}{3}\right]=\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right]$$

とすると，右辺の左側の開いている側は，1/3 を含まないことを意味してしまい，他方，右側の閉じている側は，1/3 を含むことを意味してしまい矛盾する．

⑱半開点{1/3]の区間長|{1/3]|は，次式で与えられる．

$$\lim_{n\to\infty}\left|\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n},\frac{1}{3}\right]\right|=\left|\left(\frac{1}{3}-\hat{0},\frac{1}{3}\right]\right|=\frac{1}{3}-\left(\frac{1}{3}-\hat{0}\right)=\hat{0}>0$$

$$\therefore\quad\left|\left\{\frac{1}{3}\right]\right|=\hat{0}>0$$

⑲極限分割線分である個々の半開点は，(1)式に適うので連続であり，連続体と 1 対 1 対応する．

⑳区間長 1 の中に，無と有（半開点）が交互に密集して出来た平行線は，それぞれ線分としては，連続体と 1 対 1 対応しないが，分割線分である個々の半開点は，連続体と 1 対 1 対応する．

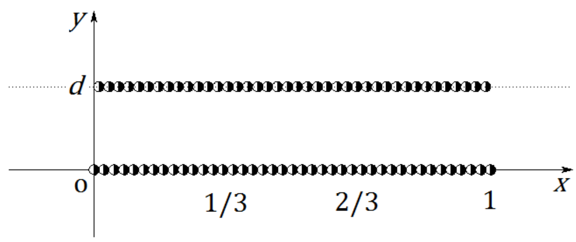

Fig.2　極限分割時の平行な離散的連続点線イメージ

以上の分析より，点の種類には，閉点[a]，左半開点(a]，右半開点[a)，開点(a)の四種が存在すると言える．そして，これらの大きさは，

$$|[a]|=0,\ \ 0<|\{a]|<\varepsilon,\ \ 0<|[a\}|<\varepsilon,\ \ 0<|(a)|<\varepsilon$$

である．従って，ユークリッドの点とは，閉点のことを意味する．以上より，直ちに，次の定理が成り立つ．

定理　連続体を，極限まで分割しても各分割体は閉点にはならない．

そして，これは，その逆の命題，即ち，「閉点によって連続体を構成することはできない」が真であることを示唆しており，同時に，数学史上の最大級の命題で，「線は点から作られる」が偽であることを強く示唆している．