2016 年 2 月 12 日
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

円上におけるピタゴラスの定理とゼロ除算

単位円上の点 P と原点 O とを結ぶ線分 OP と x 軸との狭角を θ とする．このとき，点 P の座標は，$(\cos\theta,\sin\theta)$であるから，

$$\cos\theta = \frac{1-\sin^2\theta}{\cos\theta} \qquad (1)$$

並びに，

$$\sin\theta = \frac{1-\cos^2\theta}{\sin\theta} \qquad (2)$$

を得る．ここで，(1)式及び(2)式は，全ての θ に対して成り立つ．
例えば，(1)式において，$\theta=\pi/2$ とすると，

$$\cos\frac{\pi}{2} = \frac{1-\sin^2\frac{\pi}{2}}{\cos\frac{\pi}{2}} = \frac{1-1^2}{0} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (3)$$

を得，また(2)式において，$\theta=0$ とすると，

$$\sin 0 = \frac{1-\cos^2 0}{\sin 0} = \frac{1-1^2}{0} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (4)$$

を得る．これら(3)式並びに(4)式は，何れもゼロ除算の基本定理による．□
ただし，同じ関数同士の約分を考える際には，関数値が 0 となる場合に注意が必要である．
勿論，半径 r 上の点 P を考えて，

$$x = \frac{r^2-(r\sin\theta)^2}{r\cos\theta} \qquad (5)$$

並びに，

$$y = \frac{r^2-(r\cos\theta)^2}{r\sin\theta} \qquad (6)$$

を考えても同様の結果を得る．なお，半径 $r=0$ のとき，(5)，(6)式は，それぞれ，

$$x = \frac{r^2-(r\sin\theta)^2}{r\cos\theta} = \frac{0^2-(0\cdot\sin\theta)^2}{0\cdot\cos\theta} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (7)$$

並びに，

$$y = \frac{r^2-(r\cos\theta)^2}{r\sin\theta} = \frac{0^2-(0\cdot\cos\theta)^2}{0\cdot\sin\theta} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (8)$$

を得る．ただし，この例では，r を事前に約分しておいても結果は(7)，(8)式と同値となる．
また，

$$\frac{x}{r} = \cos\theta\,,\ \ \frac{y}{r} = \sin\theta$$

であることから，$r=0$ のとき，$\cos\theta=0$，$\sin\theta=0$ となることに注意を要する．つまり，これ

を加味すると，(7)式，(8)式は，それぞれ，

$$x = \frac{r^2 - (r \sin \theta)^2}{r \cos \theta} = \frac{0^2 - (0 \cdot 0)^2}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (9)$$

並びに，

$$y = \frac{r^2 - (r \cos \theta)^2}{r \sin \theta} = \frac{0^2 - (0 \cdot 0)^2}{0 \cdot 0} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (10)$$

となる．なお，同じ文字同士，ここでは r 同士は，$r^2/r=r$ と約分しても分子に r が残るために，$r=0$ としても約分の前後において結果に違いは生じないが，$0/0 \neq 1$ であって $0/0=0$ であることから本来 $a/a=1$ という約分には，注意が必要となる．