2016年2月14日
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

関数剰余式ゼロ除算

定理）
被除関数 $P(x)$，除関数 $Q(x)$，商関数 $A(x)$，剰余関数 $R(x)$として，

$$P(x)=Q(x)A(x)+R(x)$$

とするとき，

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Q(x)}{Q(x)}A(x)\cdots R(x)$$

において，$Q(a)=0$を満たす a に対して，

$$\frac{R(a)}{0}=0\cdots R(a)$$

が成り立つ．□

証明）
仮定より，被除関数 $P(x)$，除関数 $Q(x)$，商関数 $A(x)$，剰余関数 $R(x)$であって，

$$P(x)=Q(x)A(x)+R(x) \qquad (1)$$

であるから，

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{Q(x)}{Q(x)}A(x)\cdots R(x) \qquad (2)$$

と表される．なお，0/0＝0 であって，約分可能なのは Q/Q＝1 が成り立つ場合に限られることから(2)式においては，敢えて約分しないこととする．
さて，(1)式より，

$$Q(a)=0\Rightarrow R(a)=P(a) \qquad (3)$$

であるから，(2)式において，x＝a とすると，左辺は，

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}=\frac{P(a)}{0}=\frac{R(a)}{0} \qquad (4)$$

であって，右辺は，

$$\frac{Q(x)}{Q(x)}A(x)=\frac{Q(a)}{Q(a)}A(a)=\frac{0}{0}A(a)=0\cdot A(a)=0\cdots R(a) \qquad (5)$$

であるから，(4)式と(5)式より，

$$\frac{R(a)}{0}=0\cdots R(a) \qquad (6)$$

を得る．□
ただし，ここで，$A(a)$＝0 は，一般には成り立たないことに注意を要する．

さて，関数剰余式ゼロ除算は，具体的には，例えば，
被除関数 $P(x)$を，

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1 \qquad (7)$$

除関数 $Q(x)$を，

$$Q(x) = x + 1 \qquad (8)$$

とするとき，商関数 $A(x)$は，

$$A(x) = 2x - 5 \qquad (9)$$

であって，剰余関数 $R(x)$は，

$$R(x) = 6 \qquad (10)$$

となる．従って，これら(7)，(8)，(9)，(10)式を(2)式に代入すると，

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1} = \frac{x + 1}{x + 1}(2x - 5) \cdots 6 \qquad (11)$$

となるので，(11)式の左辺を $f(x)$，右辺を $g(x)$と置くと，
x＝b≠－1 のとき，

$$Q(b) \neq 0 \qquad (12)$$

であるから(11)式は，

$$\frac{2b^2 - 3b + 1}{b + 1} = (2b - 5) \cdots 6 \qquad (13)$$

であって，

$$2b^2 - 3b + 1 = (b + 1)(2b - 5) + 6 \qquad (14)$$

が成り立ち，(1)式の関係を満たす．
x＝－1 のとき，

$$Q(-1) = 0 \qquad (15)$$

であるから，(11)式における $f(x)$は，

$$f(-1) = \frac{2(-1)^2 - 3(-1) + 1}{(-1) + 1} = \frac{6}{0} \qquad (16)$$

であり，$g(x)$は，

$$g(-1) = \frac{(-1) + 1}{(-1) + 1}\{2 \cdot (-1) - 5\} = \frac{0}{0} \cdot (-7) = 0 \cdot (-7) = 0 \cdots 6 \qquad (17)$$

であるから，(16)式と(17)式より，

$$\frac{6}{0} = 0 \cdots 6 \qquad (18)$$

を得る．これは，即ち，

$$6 = 0 \cdot 0 + 6 \qquad (19)$$

を意味する．ただし，この例において，

$$A(-1) = -7 \qquad (20)$$

であって，$A(a)$＝0 が成り立つ訳ではないことに注意する．