2016年2月14日
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

剰余式ゼロ除算とゼロのゼロ乗

非負実数として，被除数 a，除数 b，商 c，一般剰余 d は，

$$\frac{a}{b} = c \cdots d \qquad (1)$$

と表される．ただし，d は，$0 \leqq d \leqq a$ を満たし，c を最大化した際の非負最小値をとり，特に，$b \neq 0$ ならば，$0 \leqq d < b$ を満たす．
さて，(1)式はまた，

$$a = b \times c + d \qquad (2)$$

と表される．ここで，(2)式の両辺から d を減じ，更に，両辺に b^{-1} を乗じることで，

$$(a-d)b^{-1} = bc \cdot b^{-1} = (b \cdot b^{-1})c = b^{1-1} \cdot c = b^0 c$$

$$\therefore\ (a-d)b^{-1} = b^0 c \qquad (3)$$

を得る．ここで，$b=0$ とすると，(2)式より，$a=d$ である．従って，(3)式は，左辺が，

$$(a-d)b^{-1} = (a-a)b^{-1} = 0 \cdot 0^{-1} = 0^{1-1} = 0^0$$

$$\therefore\ (a-d)b^{-1} = 0^0 \qquad (4)$$

であって，右辺が

$$b^0 c = 0^0 \cdot c \qquad (5)$$

であるから(4)式と(5)式より，

$$0^0 = 0^0 \cdot c \qquad (6)$$

を得るので，

$$(c-1)0^0 = 0 \qquad (7)$$

と変形し，$c \neq 1$ を前提として，両辺を $c-1$ で除し，

$$0^0 = \frac{0}{c-1} \qquad (8)$$

と変形すると，

$$0^0 = 0 \qquad (9)$$

を得る．なお，剰余式ゼロ除算によれば，

$$\frac{0}{c-1} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (10)$$

であるから，(8)式と(10)式より，

$$0^0 = \frac{0}{0} = 0 \qquad (11)$$

を得る．□