2016年2月14日
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

初等分数関数の定積分とゼロ除算

閉区間[0,1]について，デデキントの切断定理より，次の集合の関係，

$$\{[0,1]\} = \{[0], (0,1]\} \qquad (1)$$

が成り立つ．ただし，ここで，(1)式右辺の[0]は，閉点と呼び，

$$[0] \equiv [0,0] \qquad (2)$$

の関係で定義される，ユークリッドの点を意味する．
ところで，初等分数関数，

$$-\frac{1}{x^2} \qquad (3)$$

を，x について閉区間[0,1]における定積分をすることを考える．つまり，

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\left(-\frac{1}{x^2}\right) \qquad (4)$$

である．ところが，この定積分は，ゼロ除算を含み，このままでは，定積分を実行することが出来ないので，(1)式の関係を用いて，次のように展開する必要がある．即ち，

$$\begin{aligned}\int_{[0}^{1]} \mathrm{d}x\left(-\frac{1}{x^2}\right) &= \int_{[0}^{0]} \mathrm{d}x\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \int_{(0}^{1]} \mathrm{d}x\left(-\frac{1}{x^2}\right)\\ &= \left[\frac{1}{x}\right]_{[0}^{0]} + \left[\frac{1}{x}\right]_{(0}^{1]}\\ &= \left(\frac{1}{0} - \frac{1}{0}\right) + \left(1 - \frac{1}{\hat{0}}\right)\\ &= (0-0) + (1-\infty)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$\therefore \int_{[0}^{1]} \mathrm{d}x\left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty \qquad (5)$$

となる．ただし，$\hat{0}$ は，正の極限小であって，0より大きく，如何なる正定数よりも小さい．即ち，

$$0 < \hat{0} \qquad (6)$$

と表される．□
次に，双曲関数 $1/x$ に関し，x について閉区間[0,1]における定積分を考える．つまり，

$$\int_{[0}^{1]} \mathrm{d}x\frac{1}{x} = \int_{[0}^{0]} \mathrm{d}x\frac{1}{x} + \int_{(0}^{1]} \mathrm{d}x\frac{1}{x} \qquad (7)$$

であって，勿論，(1)式の関係を用いて展開した．これより，

$$\begin{aligned}\int_{[0}^{1]} \mathrm{d}x \frac{1}{x} &= \int_{[0}^{0]} \mathrm{d}x \frac{1}{x} + \int_{(0}^{1]} \mathrm{d}x \frac{1}{x} \\ &= [\log_e x]_{[0}^{0]} + [\log_e x]_{(0}^{1]} \\ &= (\log_e 0 - \log_e 0) + \left(\log_e 1 - \log_e \hat{0}\right) \\ &= (\log_e 0 - \log_e 0) + \{0 - (-\infty)\} \\ &= (\log_e 0 - \log_e 0) + \infty \qquad (8)\end{aligned}$$

を得る．ところで，

$$\int_{[0}^{0]} \mathrm{d}x \frac{1}{x} = \left[\frac{1}{x} \cdot x\right]_{x=0} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (9)$$

他方，

$$\int_{[0}^{0]} \mathrm{d}x \frac{1}{x} = \log_e 0 - \log_e 0 \qquad (10)$$

であるから，(9)式と(10)式により，

$$\log_e 0 - \log_e 0 = 0 \qquad (11)$$

である．従って，(8)式と(11)式より，

$$\int_{[0}^{1]} \mathrm{d}x \frac{1}{x} = \infty$$

が成り立つ．□