2016 年 2 月 17 日
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

関数剰余式ゼロ除算とゼロのゼロ乗

定理）次の関係式，

$$P(x) = Q(x)A(x) + R(x)$$

を満たす被除関数 $P(x)$，除関数 $Q(x)$，商関数 $A(x)$，剰余関数 $R(x)$について，

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = Q^0(x)A(x) \cdots R(x)$$

が成り立ち，特に，$Q(a) = 0$を満たす a に対して，

$$\frac{R(a)}{0} = 0 \cdots R(a)$$

が成り立つ．ただし，$Q^0(x)$は，Q^0を意味し，

$$Q^0(x) = \begin{cases} 0 & (Q = 0) \\ 1 & (Q \neq 0) \end{cases}$$

である．

証明）仮定より，被除関数 $P(x)$，除関数 $Q(x)$，商関数 $A(x)$，剰余関数 $R(x)$であって，

$$P(x) = Q(x)A(x) + R(x) \qquad (1)$$

であるから，両辺を$Q(x)$で除すことで，

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q(x)}{Q(x)}A(x) \cdots R(x) \qquad (2)$$

と表される．なお，0/0＝0 であって，約分可能なのは Q/Q＝1 が成り立つ場合に限られることから(2)式においては，敢えて約分しないこととする．
ここで，(2)式の右辺の Q/Q の部分は，

$$\frac{Q(x)}{Q(x)} = Q^{+1}(x) \cdot Q^{-1}(x) = Q^{1-1}(x) = Q^0(x) \qquad (3)$$

であって，$Q(a) = 0$を満たす a に対して，

$$Q^0(a) = \frac{Q(a)}{Q(a)} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (4)$$

を得，他方，$Q(b) \neq 0$を満たす b に対して，

$$Q^0(b) = \frac{Q(b)}{Q(b)} = 1 \qquad (5)$$

を得る．従って，(4)式と(5)式より，

$$Q^0(x) = \begin{cases} 0 & (Q = 0) \\ 1 & (Q \neq 0) \end{cases} \qquad (6)$$

が成り立つ．これより，(3)式と(6)式を(2)式に適用することで，

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = Q^0(x)A(x) \cdots R(x) \quad Q^0(x) = \begin{cases} 0 & (Q = 0) \\ 1 & (Q \neq 0) \end{cases} \tag{7}$$

を得る．

さて，(1)式より，

$$Q(a) = 0 \Rightarrow R(a) = P(a) \tag{8}$$

であるから，(7)式において，$x=a$ とすると，左辺は，

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} = \frac{P(a)}{0} = \frac{R(a)}{0} \tag{9}$$

であって，右辺は，

$$Q^0(x)A(x) = Q^0(a)A(a) = 0 \cdot A(a) = 0 \cdots R(a) \tag{10}$$

であるから，(9)式と(10)式より，

$$\frac{R(a)}{0} = 0 \cdots R(a) \tag{11}$$

を得る．□

ただし，ここで，$A(a)=0$ は，一般には成り立たないことに注意を要する．

さて，関数剰余式ゼロ除算は，具体的には，例えば，

被除関数 $P(x)$を，

$$P(x) = 2x^2 - 3x + 1 \tag{12}$$

除関数 $Q(x)$を，

$$Q(x) = x + 1 \tag{13}$$

とするとき，商関数 $A(x)$は，

$$A(x) = 2x - 5 \tag{14}$$

であって，剰余関数 $R(x)$は，

$$R(x) = 6 \tag{15}$$

となる．従って，これら(12)，(13)，(14)，(15)式を(7)式に代入すると，

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x + 1} = (x + 1)^0(2x - 5) \cdots 6 \tag{16}$$

となるので，(16)式の左辺を $f(x)$，右辺を $g(x)$と置くと，

$x=b\neq-1$ のとき，

$$Q(b) \neq 0 \tag{17}$$

であるから(16)式は，

$$\frac{2b^2 - 3b + 1}{b + 1} = (2b - 5) \cdots 6 \tag{18}$$

であって，

$$2b^2 - 3b + 1 = (b + 1)(2b - 5) + 6 \tag{19}$$

が成り立ち，(1)式の関係を満たす．

$x=-1$ のとき，

$$Q(-1) = 0 \tag{20}$$

であるから，(16)式における $f(x)$は，

$$f(-1) = \frac{2(-1)^2 - 3(-1) + 1}{(-1) + 1} = \frac{6}{0} \qquad (21)$$

であり，$g(x)$は，

$$g(-1) = \{(-1) + 1\}^0 \{2 \cdot (-1) - 5\} = 0^0 \cdot (-7) = 0 \cdot (-7) = 0 \cdots 6 \qquad (22)$$

である．なお，ここで(22)式における変形は，ゼロのゼロ乗の基本定理 0^0＝0 を用いている．従って，(21)式と(22)式より，

$$\frac{6}{0} = 0 \cdots 6 \qquad (23)$$

を得る．これは，即ち，

$$6 = 0 \cdot 0 + 6 \qquad (24)$$

を意味する．ただし，この例において，

$$A(-1) = -7 \qquad (25)$$

であって，$A(a)$＝0 が成り立つ訳ではないことに注意する．