2015.12.17
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

一般逆数とゼロ除算

逆数を自然な形で拡張し，ゼロ除算の概念を取り込んで成立する，逆数の一般化を図ることを考えることにしよう．

定義　２つの実数 α，β についての分数 α/β の逆数$(\alpha/\beta)^{-1}$ とは，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{0}\frac{\beta}{\alpha}$$

で定義されるものとする．ただし，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{0}=\begin{cases}0 & (\alpha=0\vee\beta=0)\\ 1 & (\alpha\neq0\wedge\beta\neq0)\end{cases}$$

である．

定義により，或る数 α，或る数 β について，

$$\frac{\alpha}{\beta}=\gamma \qquad (1)$$

とすると，その逆数は，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}=\gamma^{-1} \qquad (2)$$

であるから，$\alpha=\beta$ の場合，(1)式は，

$$\frac{\alpha}{\alpha}=\gamma \qquad (3)$$

であって，(2)式は，

$$\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^{-1}=\gamma^{-1} \qquad (4)$$

であり，定義から

$$\gamma=\frac{\alpha}{\alpha}=\left(\frac{\alpha}{\alpha}\right)^{-1}=\gamma^{-1} \qquad (5)$$

を得る．ゆえに，

$$\gamma=\gamma^{-1}\quad(\alpha=\beta) \qquad (6)$$

が成り立つ．この γ の値は，$\alpha=\beta$ の値によって次の二値をとり得て，

$$0=0^{-1}\quad(\alpha=\beta=0) \qquad (7)$$

$$1 = 1^{-1} \quad (\alpha \neq 0 \wedge \alpha = \beta) \qquad (8)$$

となる．なお，(7)式は，0 の逆数，即ち 0^{-1} は，1/0 ではなく，0 に限ることを意味している．また，$\alpha/\beta=(\alpha/\beta)^1$ 並びに $\gamma=\gamma^1$ を勘案して，(1)式と(2)式の辺々の積をとると，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^1 \times \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} = \gamma^1 \times \gamma^{-1} \qquad (9)$$

であるから(9)式左辺の指数算を行うと，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^1 \times \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{1-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 \qquad (10)$$

であるから，

$$\frac{\alpha}{\beta} \times \frac{\beta}{\alpha} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 \qquad (11)$$

または，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 \frac{\beta}{\alpha} \qquad (12)$$

を得る．この(11)，(12)式は，正に，逆数のより厳密な定義式であり，逆数の自然な拡張になっていると言ってよい．つまり，(11)式及び(12)式は一般逆数の定義式であると言える．

従って，或る数 α と或る数 β について，α/β の逆数，即ち $(\alpha/\beta)^{-1}$ は，(12)式を満たし，従って，α 又は β の少なくとも何れか一方が 0 のとき，ゼロ除算の基本定理 $a/0=0$，並びに，ゼロ乗の基本定理 $0^0=0$ から，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = \left(\frac{0}{\beta}\right)^0 = 0^0 = 0 \qquad (13)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = \left(\frac{\alpha}{0}\right)^0 = 0^0 = 0 \qquad (14)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^0 = \left(\frac{0}{0}\right)^0 = 0^0 = 0 \qquad (15)$$

を得，その逆数は 0 に限られることを示している．なお，(14)式の関係は，$a\neq 0$ のとき，代数学的には，

$$\frac{a}{0} = \frac{a}{0}\cdot 1 = \frac{a}{0}\cdot\frac{b}{b} = \frac{a\times b}{0\times b} = \frac{b\times a}{0} = b\cdot\frac{a}{0} \quad (b \neq 0,1) \qquad (16)$$

これより，

$$\frac{a}{0} = \frac{0}{b-1} = 0 \qquad (17)$$

を得，ゆえに，

$$\frac{a}{0} = 0 \qquad (18)$$

が成り立つ（ただし，分数と除算の相異点には注意が必要である．）．従って，α 又は β の少

なくとも何れか一方が 0 のときの逆数は，

$$\left(\frac{0}{\beta}\right)^{-1}=\left(\frac{0}{\beta}\right)^{0}\frac{\beta}{0}=0\cdot 0=0 \qquad (19)$$

$$\left(\frac{\alpha}{0}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha}{0}\right)^{0}\frac{0}{\alpha}=0\cdot 0=0 \qquad (20)$$

$$\left(\frac{0}{0}\right)^{-1}=\left(\frac{0}{0}\right)^{0}\frac{0}{0}=0\cdot 0=0 \qquad (21)$$

となる．これら結果からは，0^{-1}＝0 が一意的に成り立つと言える．このことは，
(19)，(20)，(21)式の何れも，最右辺と最左辺を入れ換えた両辺の逆数をとった際に，それぞれ，

$$0^{-1}=\left(\left(\frac{0}{\beta}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{0}{\beta}\right)^{+1}=0^1=0 \qquad (22)$$

$$0^{-1}=\left(\left(\frac{\alpha}{0}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha}{0}\right)^{+1}=0^1=0 \qquad (23)$$

$$0^{-1}=\left(\left(\frac{0}{0}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\frac{0}{0}\right)^{+1}=0^1=0 \qquad (24)$$

となる結果とも一致する．即ち，(7)式の関係，

$$0^{-1}=0$$

が一意的に成り立つと言える．

他方，α 及び β が共に 0 ではないとき，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{0}=\gamma^0=1 \qquad (25)$$

が成り立つ．従って，α 及び β が共に 0 ではないとき，α/β の逆数，即ち，$(\alpha/\beta)^{-1}$ は，従来の逆数と同様に，

$$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{0}\frac{\beta}{\alpha}=1\cdot\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\beta}{\alpha} \qquad (26)$$

で与えられる．これより，α 又は β の少なくとも何れか一方が 1 のとき，

$$\left(\frac{1}{\beta}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{\beta}\right)^{0}\frac{\beta}{1}=1\cdot\beta=\beta \qquad (27)$$

$$\left(\frac{\alpha}{1}\right)^{-1}=\left(\frac{\alpha}{1}\right)^{0}\frac{1}{\alpha}=1\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\alpha} \qquad (28)$$

$$\left(\frac{1}{1}\right)^{-1}=\left(\frac{1}{1}\right)^{0}\frac{1}{1}=1\cdot 1=1 \qquad (29)$$

となる．つまり，(7)，(28)式より，

$$\alpha^{-1}=\begin{cases}0 & (\alpha=0)\\ \dfrac{1}{\alpha} & (\alpha\neq 0)\end{cases} \qquad (30)$$

を得る．これより，演算として，

$$\times\alpha^{-1} = \begin{cases} \times 0 & (\alpha = 0) \\ \times \dfrac{1}{\alpha} & (\alpha \neq 0) \end{cases} \tag{31}$$

が成り立ち，他方，

$$\div\alpha = \begin{cases} \times 0^{-1} = \times 0 & (\alpha = 0) \\ \times \dfrac{1}{\alpha} & (\alpha \neq 0) \end{cases} \tag{32}$$

が成り立つ．従って，(31)式と(32)式から，演算置換関係

$$\times\alpha^{-1} \Leftrightarrow \div\alpha \tag{33}$$

が成り立ち，逆乗算と除算の置き換えが可能であることを示している（剰余形式を採らず，商のみを考慮する場合に限られることに注意を要する.）．