2017.1.9
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

無限と無限遠点とゼロ除算

x を実数とすると，

$$\lim_{x \to \pm 0} \frac{1}{x} = \pm\infty \qquad (1)$$

であるが，ゼロ除算の基本定理 $z/0=0$ によって，限りなく x が±0 に近づくという $x \to \pm 0$ ではなく，真に $x=0$ とする真の局所への到達では，

$$\left[\!\left[\frac{1}{x}\right]\!\right]_{x=0} = 0 \qquad (2)$$

である．これは，無限遠点としての 1/0 が 0 に対応していることと同値である．このことからも解るとおり，

$$\lim_{x \to \pm\infty} x = \pm\infty \qquad (3)$$

であるが，限りなく x が±∞に近づくという $x \to \pm\infty$ ではなく，真に $x=[\pm\infty]$ とする真の局所への到達では，

$$[\![x]\!]_{x=[\pm\infty]} = 0 \qquad (4)$$

である．ただし，ここで[±∞]は無限遠点を意味しており，絶対値が限り無く増大する意味としての無限を表す±∞と区別するものとする．

以上を踏まえると，

定理１）　$a>1$ とすると，

$$\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$$

であるのに対して，

$$[\![a^n]\!]_{n=[+\infty]} = 0$$

が成り立つ．

定理２）　$a>1$ とすると，

$$\lim_{n \to \pm\infty} \frac{1}{a^n} = 0$$

であるのに対して，

$$\left[\!\left[\frac{1}{a^n}\right]\!\right]_{n=[\pm\infty]} = 0$$

が成り立つ．

$$\because \quad \left[\!\left[\frac{1}{a^n}\right]\!\right]_{n=[+\infty]} = \frac{[\![1]\!]}{[\![a^n]\!]_{n=[+\infty]}} = \frac{1}{0} = 0$$

であり，n＝[－∞]は定理 1 と同値である．□

以上より，直ちに次のことが言える．

系 1）n→+∞の極限では，和は限りの無い項を持つものの，無限遠点まで達さないので，

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k} = 0.\dot{9} \neq 1$$

であるが，n＝[+∞]の無限遠点の局所までの和をとれば，定理 2 より，

$$\left[\!\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}\right]\!\right]_{n=[+\infty]} = \left[\!\left[1-\frac{1}{10^n}\right]\!\right]_{n=[+\infty]} = 1-\left[\!\left[\frac{1}{10^n}\right]\!\right]_{n=[+\infty]} = 1-0 = 1$$

となって，正確に 1 に一致することが示される．

即ち，

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k} < \left[\!\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{9}{10^k}\right]\!\right]_{n=[+\infty]}$$

が成り立つ．

系 2）どんなに小さな正定数 δ よりも小さく 0 よりも大きな極限小の正数 ε（0＜ε＜δ）を用いれば，

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) = 1-\varepsilon < 1$$

であるが，n＝[+∞]の無限遠点の局所までの和をとれば，

$$\left[\!\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\right]\!\right]_{n=[+\infty]} = \left[\!\left[1-\frac{1}{2^n}\right]\!\right]_{n=[+\infty]} = 1-\left[\!\left[\frac{1}{2^n}\right]\!\right]_{n=[+\infty]} = 1-0 = 1$$

が成り立つ．

The Pot of Endless Numbers　～不思議な壺～

ところで，1 より小さく，1 より小さなどのような定数よりも大きい数 s は，どのように表されるだろうか？これは，1 つの数字で表すと，無限小数でなければならない．なぜなら，その数 s が有限小数であれば，

$$0 < 0.9 < 0.99 < 0.99 \cdots 9 < s \leq \frac{9+s}{10} < 1 \qquad (1)$$

が成り立つことによる．これより，明らかに s は，

$$s = 0.999 \cdots \qquad (2)$$

という無限小数であることになる．（これは，$s = 0.\dot{9}$とも略記される．）

ところが，これは現代数学では，

$$0.999 \cdots = 1 \qquad (3)$$

とされている．果たしてこれは正しいのだろうか？この導出根拠の代表例は，(2)式の両辺を 10 倍したものの辺々から(2)式を差し引くこと，即ち，

$$\begin{array}{rr} & 10s = 9.999 \cdots \\ -) & s = 0.999 \cdots \\ \hline & 9s = 9.000 \cdots \end{array} \qquad (4)$$

を得ておき，この両辺を 9 で割ることによって，s=1 と導くというものであろう．

しかし，この操作は数学的に厳密に正しいと言えるのであろうか？そもそも s の条件は，1 より小さく，1 より小さいどのような定数よりも大きい数なのであるからこれは矛盾である．このような矛盾が起きている原因は何か？それは，極限の無限級数をあたかも有限級数かのように扱っている点にあると考えられる．無限に続く無限小の項達をどのように処理したのか，全ての項達は巧いこと差し引きされて項同士の差が 0 となったと言えるのか？

厳密な s は，極限の無限級数，即ち，

$$s = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{9}{10^k} \qquad (5)$$

と表されるものである．これは極限であるからこの和は限りなく 1 に近づくが，どこまで行っても 1 には達さない．一般に，無限級数では，項の順序を変えたり，項別の演算を行ったりすることの厳密な正当性は保証されない．つまり，(4)式の右辺で行ったような項別積若しくは桁別積が無限の彼方の項まで成立していると言えるのであろうか．

これを考えるに当たって，少し変わった視点で捉えてみよう．それは或る 1 つの数を表す不思議な壺を用いた思考実験による考察である．この壺は，引っ張り出そうと思えば，無数に各桁の数を取り出せるのであるが，取り出さないとしても壺の中には各桁の素が在って，ここでは小数第 1 位として 9 が，また小数第 2 位としてまた 9 が，そして小数第 3 位としてまたまた 9 が，というようにどの桁も 9 ばかりであって，前の位の数に対して一桁小さな位の数 9 を，次々と桁を飛ばすことなく取り出すことができるという性質を有するのである．

この壺をイメージするならば,

$$S=0.99999\cdots9^{9^{9^{9}}}\mho$$

という感じであろうか.

すると, (4)式において行ったような操作, 即ち, 両辺を 10 倍するという操作は, 果たして可能なのだろうか. 壺の中にまで桁別積が達するのであろうか.

そこで, 実際にやってみることにする訳であるが, 壺の中にまでは桁別積は及ばないものとして計算すると,

$$
\begin{array}{rl}
 & 10S=9.9999+10\mho_5 \\
-) & S=0.99999+\mho_5 \\
\hline
 & 9S=8.99991+9\mho_5
\end{array}
$$

であるから, この両辺を 9 で割ると, 当然のことながら,

$$S=0.99999+\mho_5$$

を得るのである. ただし, ここで壺の添え字は, 添え字付きの壺が初期の壺から 5 桁分を取り出した残りのものであることを示している. 以下, 添え字が n の壺を, n 次の壺というものとする.

この計算結果は, 無限の彼方までの桁の桁別積が妥当ではないのではないかということを示唆している.

この不思議な壺を用いた思考実験によると, 両辺を 10 倍するならば, 左辺は 10S であり, 右辺は 10 倍された 5 桁の数の他, 不思議な壺が 10 個になるだけであるということである.

また, n+1 次の壺と n 次の壺の差は,

$$\mho_{n+1}-\mho_n=9/10^{n+1}$$

と表される. つまり, n を極限まで大きくとって行けば, この差は限り無くゼロに近づくものの, n を極限まで大きくとったところで壺が無くなるわけではなく、この差は決してゼロにならないと理解される.