2017.1.21
道脇裕
Hiroshi Michiwaki

ゼロ除算による帯分数の拡張

定理

２つの非負整数 n，m に対して，

$$n-0\times m>n-1\times m>n-2\times m>\cdots>n-k\times m=r \quad \left(k\in \mathrm{N}_0：非負整数\right) \qquad (1)$$

を満たすとき，（ただし，r は，(1)式を満たす最小の非負整数である．）

$$\frac{n}{m}=0\frac{n-0\times m}{m}=1\frac{n-1\times m}{m}=2\frac{n-2\times m}{m}=\cdots=k\frac{n-k\times m}{m}=k\frac{r}{m}=k+\frac{r}{m}$$

$$\Rightarrow\frac{n}{m}=k\cdots r \quad \wedge \quad n=km+r \qquad (2)$$

が成り立つ．ただし，･･･r は，n を m で除した際の剰余を意味する．

証明

$m\neq 0$ のとき，

ｉ．$n>m$

$n=km+r$ ($k\in\mathbb{N}_0\wedge 0\leqq r<m$)とおけば，明かである．

ⅱ．$n=m$

与式(1)において，

$$n-0\times m>n-1\times m=0 \quad \left(k\in \mathrm{N}_0：非負整数\right)$$

より，$k=1\wedge r=0$ が成り立つ．これより，

$$\frac{n}{m}=1\cdots 0 \quad \wedge \quad n=1\times m+0=m$$

を得る．

ⅲ．$n<m$

与式(1)において，

$$n-0\times m=n \quad \left(k\in \mathrm{N}_0：非負整数\right)$$

より，$k=0\wedge r=n$ が成り立つ．これより，

$$\frac{n}{m}=0\cdots n \quad \wedge \quad n=0\times m+n=n$$

を得る．

ⅳ．$n=0$

与式(1)において，

$$n-0\times m=n \quad \left(k\in \mathrm{N}_0：非負整数\right)$$

より，$k=0 \wedge r=n=0$ が成り立つ．これより，

$$\frac{n}{m} = 0 \cdots 0 \quad \wedge \quad n = 0 \times m + 0 = 0$$

を得る．

$m = 0$ のとき，

与式(1)において，

$$n - k \times 0 = n \quad \left(k \in \mathrm{N}_0 : \text{非負整数} \right)$$

より，$k = 0 \ \wedge \ r = n$ であるから，

$$\frac{n}{m} = \frac{n}{0} = 0\frac{n - 0 \times 0}{0} = 0\frac{r}{0} = 0 + \frac{r}{0} = \frac{n}{0}$$

であって，

$$\Rightarrow \frac{n}{0} = 0 \cdots n \quad \wedge \quad n = 0 \times 0 + r = 0 \times 0 + n = n$$

が成り立つ．□

以上に見るように分母（除数）を 0 として，帯分数を自然な形で拡張することができることが解る．

一方で，

$$k\frac{r}{m} = k + \frac{r}{m} \qquad (3)$$

の関係において，$m=0$ として，$k \neq 0$ を思考し，

$$k + \frac{r}{m} = k\frac{r}{m} \qquad (4)$$

として，

$$\frac{n}{m} = k \cdots r \quad \wedge \quad n = km + r \qquad (5)$$

を導出することは出来ないことに注意する．

なぜならば，(4)式は，

$$k + \frac{r}{m} = k\frac{r}{m} = \frac{r + km}{m} = \frac{r}{m} + \frac{km}{m} = \frac{r}{m} + \frac{m}{m}k$$

$$\therefore \quad k = \frac{m}{m}k$$

これより，

$$\frac{m}{m} = 1 \qquad (6)$$

であるが，定理より

$$\frac{0}{0} = 0 \qquad (7)$$

であって不合理である．

つまり，$m=0$ とするゼロ分数に対して，0 ではない数を通分することは出来ないことに注意する必要がある．