2014年8月20日
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

除算の逆演算としての乗算に見るゼロ除算の不合理性の主張が間違いであることの証明

能く見る0除算の不合理性を示す（証明）方法の中に，$a,b,c \in \mathbb{R}$として，

$$\frac{a}{b} = c \ \Rightarrow \ a = bc \qquad (1)$$

の関係が成り立つので，$a \neq 0$において$b = 0$のとき，$a = 0$となり不合理であるゆえに，ゼロ除算，すなわち，$a/0$は定義されないとされる．これは，具体的には，

$$\frac{a}{0} = c \Rightarrow a = 0 \times c \quad (a \neq 0) \qquad (2)$$

の不合理性を主張するものである．（ここで，(2)式右辺に見る$0 \times c$の結果は0であって，0を乗じて結果が0にならない実数は存在しないことは容易に示すことが出来ることに注意を要する．これについては，後述の補題に示す.）

しかしながらこの論法は，証明として不完全であって，それどころか間違いであるとさえ言える．それを以下に示す.

定理）除算とこの逆演算としての乗算との関係によって，0除算の不合理性を示すことは不可能である.

証明）(1)式の関係が一般に成り立つとするためには，以下に見る前提が必要である．つまり，(1)式の関係が成り立つのは,

$$\frac{a}{b} = c \qquad (3)$$

の両辺にbを乗じて

$$b \times \frac{a}{b} = b \times c \qquad (4)$$

より，(4)式の左辺が

$$b \times \frac{a}{b} = a \times \frac{b}{b} = a \times 1 \qquad (5)$$

すなわち,

$$\frac{b}{b} = 1 \qquad (6)$$

が一般に成り立つか否かによることになる．つまるところ，(1)式の関係上0除算において

不合理を導くには，0/0＝1 が成り立つことを前提としている．

しかしながら 0/0＝1 が成り立つかということには証明が必要である．従って，(1)式が一般に成り立つか否かということは，0/0＝1 が成り立つか否かに依る．ゆえに，(1)式の関係上，上述の不合理が生じるからという理由だけではゼロ除算を否定することは出来ないといえる．

そこで，0/0＝1 を仮定し，$A=B\in\mathbb{R}$ として両辺に B を乗じて

$$AB = B^2 \qquad (7)$$

この両辺から A^2 を引き

$$AB - A^2 = B^2 - A^2 \qquad (8)$$

これを整理し，

$$A(A - B) = (A + B)(A - B) \qquad (9)$$

を得る．すると，仮定より明らかに両辺を（$A-B$）で割ることが可能であって，それは

$$A \times \frac{A - B}{A - B} = (A + B) \times \frac{A - B}{A - B} \qquad (10)$$

であるから，$A=B$ を踏まえ，直ちに

$$A \times \frac{0}{0} = 2A \times \frac{0}{0} \qquad (11)$$

を得，従って A は任意の実数であるから $A\neq 0$ とすれば，

$$1=2 \qquad (12)$$

を得，また $A=0$ としても(11)式は仮定より，

$$A = 2A \qquad (13)$$

であり，この両辺を 0 で割ると，

$$\frac{0}{0} = 2\frac{0}{0} \qquad (14)$$

であるから，

$$1 = 2 \times 1 \qquad (15)$$

すなわち，

$$1=2 \qquad (16)$$

を得るが，これら(12)式と(16)式は何れも不合理．このような不合理が生じたのは，0/0＝1 が成り立つと仮定したことによる．ゆえに，0/0＝1 は成り立たない．

以上によって，(1)式の関係上において，0 除算が不合理であることを示すことは不可能であることが証明された．□

本定理によって，除算とその逆演算としての乗算との関係上において，ゼロ除算の不合理を示すことが不可能であることが明らかとなったが，本定理は，寧ろ，乗算の逆演算として除算を定義することが狭義除算であることを示していると言える．つまり，このよう

な除算定義は，除算 a/b における除数たる b について，$b/b=1$ の関係が成り立つ場合に限定されることを示しており，このような限定条件付きの除算は，狭義の除算であると言わざるを得ない．

補題）0（実数ゼロ）を乗じた解が 0（実数ゼロ）にならない実数は存在しないことの証明
証明）いま，0 を乗じても 0 にならないが，四則演算や分配法則、結合法則等一般の数に対して適用可能な処理は適用可能であるという特別な量$\bar{0}$が存在したとする．
このとき，

$$0=0+0$$

の両辺に$\bar{0}$を乗じると，

$$\begin{aligned}0\times\bar{0}&=(0+0)\times\bar{0}\\&=0\times\bar{0}+0\times\bar{0}\end{aligned}$$

となる．ここで，$0\times\bar{0}=\mu\neq 0$と表記することにすれば，上式は，

$$\mu=2\mu$$

これより，

$$\mu=0$$

を得るが，これは仮定に反する．
つまり，いかなる実数xに対しても0を乗じた解は0，すなわち

$$x\times 0=0$$

でなければならず，$a=0$も例外ではないことを意味する．
勿論，0×0の場合，

$$0\times 0=0$$

でなければならない．□