2017.9.10
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

不動点定理によるゼロ除算の保証

定理）零ベクトルを$\mathbf{0}$とするとき，

$$\frac{\mathbf{0}}{0}=\mathbf{0}$$

が成り立つ．また，0/0＝0 が成り立つ．

証明）角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$は，単位位置ベクトル$\boldsymbol{e_r}$と位置ベクトル$\boldsymbol{r}$のノルム$|\boldsymbol{r}|$，並びに，接線速度ベクトル$\boldsymbol{v}$を用いて，

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{e_r}\times\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r}|} \qquad (1)$$

と表される．

さて, 平面R^2上における$B^2=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 1\}$, 即ち閉円板を考える. これは, 極座標$\{r,\theta\}$として考えてよい.

ここで，L.E.J.Brouwer の不動点定理より，平面R^2上における円板B^2は自身B^2への連続写像fにおいて，少なくとも１つの不動点Pが存在し，また，Poincare-Hopf の不動点定理より，接ベクトル場は少なくとも１つの零点$\mathbf{0}$を持つということから，円板B^2上には接線速度ベクトル$\boldsymbol{v}$＝$\mathbf{0}$となる点が存在して，この点は原点（円板B^2の中心点）に設定可能で，この場合，角速度ベクトル$\boldsymbol{\omega}$＝$\mathbf{0}$となるといえる．従って，(1)式は,

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{e_r}\times\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e_r}\times\frac{\mathbf{0}}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{\boldsymbol{e_r}\times\mathbf{0}}{r}=\frac{\mathbf{0}}{r}=\mathbf{0} \qquad (2)$$

となる. 更に不動点Pが原点であることから(2)式における位置ベクトル$\boldsymbol{r}$は, $\boldsymbol{r}$＝$\mathbf{0}$ であって,

$$\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{e_r}\times\frac{\boldsymbol{v}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{e_r}\times\frac{\mathbf{0}}{|\mathbf{0}|}=\frac{\boldsymbol{e_r}\times\mathbf{0}}{0}=\frac{\mathbf{0}}{0}=\mathbf{0} \qquad (3)$$

が成り立つ.

勿論，零ベクトル$\mathbf{0}$は，大きさだけを考えれば，スカラ量0として扱って差し支えなく，

$$\frac{0}{0}=0 \qquad (4)$$

を得る．□

以上から判る通り，不動点定理は，ゼロ除算の成立を保証しているといえる．また上記の零ベクトル除算の定理からゼロ除算の基本定理0/0＝0が容易に導出されることが判る．これは，逆に上記定理がゼロ除算の基本定理0/0＝0のベクトル拡張になっているともいえる．