2014 年 9 月 21 日
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

対数上におけるゼロ除算

定理１）$0^0 = 0$ が成り立つ.
定理２）$\log_0 0 = 0$ が成り立つ.
定理３）b＝0 に対して,

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b$$

　は成り立たない.
定理４）$0^{-1} = 0$ と 0/0＝0 は同値である.

証明）先ず，0 除算における以下の３ケースについての対数の挙動を示す.
Case ｉ）0 除算によれば,

$$\frac{0}{0} = 0 \qquad (1)$$

このケースにおいて，両辺にそれぞれ対数をとれば,

$$\log\frac{0}{0} = \log 0 \qquad (2)$$

この(2)式の左辺は,

$$\log\frac{0}{0} = \log 0 - \log 0 = 0 \qquad (3)$$

であるから(2)式と(3)式より,

$$\log 0 = 0 \qquad (4)$$

を得る.

Case ii）0 除算によれば,

$$\frac{1}{0} = 0 \qquad (5)$$

である．この両辺にそれぞれ対数をとれば,

$$\log\frac{1}{0} = \log 0 \qquad (6)$$

この(6)式の左辺は,

$$\log\frac{1}{0} = \log 1 - \log 0 = 0 - \log 0 = -\log 0 \qquad (7)$$

であるから(6)式と(7)式より,

$$-\log 0 = \log 0 \qquad (8)$$

従って，この両辺に log0 を加えれば,

$$0 = 2\log 0$$

$$\therefore \quad \log 0 = 0 \qquad (9)$$

を得る.

Case ⅲ）0 除算によれば,

$$\frac{a}{0} = 0 \qquad (10)$$

である．ただし，$a>0 \wedge a \neq 1$ とする．ここで，(10)式の両辺にそれぞれ対数をとれば,

$$\log\frac{a}{0} = \log 0 \qquad (11)$$

この(11)式の左辺は,

$$\log\frac{a}{0} = \log a - \log 0 \qquad (12)$$

であるから(11)式と(12)式より,

$$\log a - \log 0 = \log 0 \qquad (13)$$

従って，この両辺に log0 を加えれば,

$$\log a = 2\log 0$$

$$\therefore \quad \log 0 = \frac{1}{2}\log a \qquad (a > 0 \wedge a \neq 1) \qquad (14)$$

を得る．つまり,

$$\log a \neq 0 \qquad (15)$$

であるから

$$\log 0 \neq 0 \qquad (16)$$

を得る．ところが，(16)式の結果は，(4)式，並びに，(9)式と矛盾する．このような結果が生じたのは，0 でない２つの実数 a，b に対して,

$$\log\frac{a}{b} = \log a - \log b \qquad (17)$$

が成り立つことを前提とする対数関数に対して, b=0 のケースを適用しているからに他ならない．本来，(17)式は,

$$\begin{aligned}\log\frac{a}{b} &= \log a - \log b \\ &= \log a + \log b^{-1}\end{aligned}$$

$$= \log a + \log \frac{1}{b}$$

と展開される，つまり，

$$b^{-1} = \frac{1}{b} \qquad (18)$$

即ち，

$$b \cdot b^{-1} = 1 \qquad (19)$$

が成り立つことを前提としている．(19)式は，対数関数において，(17)式に示される公式が適用可能な範囲が，或る数とその逆数の関係が，それらの相乗についての解が 1 に等しくなるという種に限られることを意味している（定理３□）．

　これに対して，0 の逆数は，1/0 ではなく， 0 であることから対数関数に対して 0 除算を適用するとき，(17)式を運用することが出来ないことを意味する．

　ところで，対数と指数の関係は，0 でない３つの実数 a，P，x に対して，

$$x = a^P \Leftrightarrow P = \log_a x \qquad (20)$$

が成り立つ．勿論，(20)式にいては，逆数を当てても

$$x^{-1} = (a^P)^{-1} \Leftrightarrow -P = \log_a \frac{1}{x} \qquad (21)$$

が成り立ち、(20)式と(21)式の関係から指数同士は辺々を乗じて，対数同士は辺々を加え合わせると，

$$x \cdot x^{-1} = a^P \cdot a^{-P} \Leftrightarrow P - P = \log_a x + \log_a \frac{1}{x} \qquad (22)$$

であって，(22)式のそれぞれは，

$$x \cdot x^{-1} = x^{1-1} = x^0 = \frac{x}{x} = 1 \qquad (23)$$

$$a^P \cdot a^{-P} = a^{P-P} = a^0 = \frac{a^P}{a^P} = 1 \qquad (24)$$

$$P - P = 0 \qquad (25)$$

$$\log_a x + \log_a \frac{1}{x} = \log_a \left(x \cdot \frac{1}{x} \right) = \log_a \frac{x}{x} = \log_a 1 = 0 \qquad (26)$$

を意味する．

　ここで，或る実数 a を実数 P 乗したものが 0 に等しいという数の組み（a,P）が存在したとする．これは，

$$0 = a^P \qquad (27)$$

と表される．他方，$x = a^P$ の逆数の関係式

$$(x)^{-1} = (a^P)^{-1} = a^{-P} \qquad (28)$$

に対して $x=0$ を適用すると，

$$0^{-1}=0 \qquad (29)$$

であるから，(28)式と(29)式から

$$0^{-1}=(a^P)^{-1}=a^{-P}=0 \qquad (30)$$

を得る．すると，(27)式と(30)式より，

$$a^P=a^{-P} \qquad (31)$$

が成り立つ．これより直ちに，

$$P=-P$$

$$\therefore \quad 2P=0$$

$$\therefore \quad P=0$$

$$\therefore \quad 0=a^0 \qquad (32)$$

を得る．ところが，$a\neq 0$ を仮定すれば，

$$a^0=1 \qquad (a\neq 0) \qquad (33)$$

であるから $a\neq 0$ の仮定の下に(32)式は矛盾する．つまり，(27)式と(30)式からは，明らかに

$$a^P\cdot a^{-P}=0 \qquad (34)$$

が成り立つことになる．勿論，先に示したように，対数関数においては，(17)式が適用可能なのは，次の(35)式

$$a^P\cdot a^{-P}=1 \qquad (35)$$

を満足する必要がある．ところで，(27)式及び(30)式は，

$$a^P=0\wedge a^{-P}=0 \qquad (36)$$

が成立することを条件としているが，(36)式を満たすのは，$a=0$ の場合に限られる．また(34)式は，

$$a^P\cdot a^{-P}=a^{P-P}=a^0=0 \qquad (37)$$

であるから，(36)式と(37)式より，

$$0^0=0 \qquad (38)$$

を得る（定理 1□）．

　さて，(38)式と対数の定義から明らかに，

$$\log_0 0=0 \qquad (39)$$

を得る．これは，(38)式の両辺に底を 0 とする対数をとることでも得られる．即ち，

$$\log_0 0^0=\log_0 0$$

$$0\log_0 0=\log_0 0$$

$$0=\log_0 0$$

となる（定理２□）．

　ところで，(39)式は，底の変換公式を用いることによって，

$$\log_0 0=\frac{\log_b 0}{\log_b 0} \qquad (40)$$

と表される．ここで，

$$q = \log_b 0 \Leftrightarrow 0 = b^q \qquad (41)$$

と置くと，$|b| \geqq 1$ のとき，(41)式を満たすのは，$q=-\infty$のときのみであり，$1>|b|>0$ のとき，(41)式を満たすのは，$q=\infty$のときのみである．これは，b が $b=0$ のみしかとり得ないことを意味する．これより，(39)式を合わせ考えれば，

$$\log_b 0 = \log_0 0 = 0 \qquad (42)$$

を得る．従って，(42)式を(40)式に代入し，再び(39)式を用いれば，

$$0 = \log_0 0 = \frac{\log_b 0}{\log_b 0} = \frac{\log_0 0}{\log_0 0} = \frac{0}{0}$$

$$\therefore \quad \frac{0}{0} = 0 \qquad (43)$$

を得る．

なお，(38)式より，

$$0 = 0^0$$

この両辺に底が c の対数をとると，

$$\log_c 0 = 0 \log_c 0$$

$$\therefore \quad \log_c 0 = 0$$

これより，

$$0 = c^0$$

を得るが，これを満たす c は $c=0$ に限られ，同時にこれは(42)式を裏付ける（定理４）．