2018.4.28
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

乗算の構造とゼロ乗算とゼロ除算
～非負最小同値性原理とその逆演算における保存則～

Ａ点から別のＢ点に「りんご」を運ぶ．ただし，運送前，Ｂ点の「りんご」は０［個］とする．この前提に対して，以下の問について検討する．

Ｑ）Ａ点には「りんご」がa［個］あり，これらをトラックでＢ点に運ぶ．運送後のＢ点の「りんご」の個数bは何［個］か？

Ａ）この問題は，【状態】と【事象】の掛け合わせによる積と，【結果】とが等価であるという関係であることから，

$$【状態】\times【事象】=【結果】\qquad(1)$$

として求めることが出来るといえる．

ここで，【状態】とは，［個数］と［回数］の関係から構成される組立次元（単位）であり，運送［回数］毎の運送［個数］として定義されるといえる．また，ここでの【事象】とは，運送［回数］を意味し，また，【状態】，【事象】，【結果】の各次元は，

$$【状態】=\frac{[個]}{[回]}=[個]^{1}[回]^{-1}=[個/回]\qquad(2)$$

$$【事象】=[回]=[回]^{1}\qquad(3)$$

$$【結果】=[個]=[個]^{1}\qquad(4)$$

であって，

$$【状態】\times【事象】=\langle \textit{被乗数}\rangle\frac{[個]}{[回]}\times\langle \textit{乗数}\rangle[回]=\langle \textit{積}\rangle[個]=【結果】\qquad(5)$$

の関係性が成り立つことについては，先の拙著”乗算と無剰余式除算及び有剰余式除算の原理と構造とゼロ除算”　（零除算 51）にて述べた．ここでは，乗算と除算の対応構造を示した．しかし，【状態】が０［個/回］であるとき，運送の回数を重ねたとしても結局は，Ｂ点に届く「りんご」の個数は０［個］となることから，そのような運送における本質的な数学的意味合いは，一体どのようなモノなのか？という疑問が浮かび上がった．そこで，本論においては，【状態】が０［個/回］であるときの運送の回数が持つ本質的な意味を明確化することを主題として考えを進めることとしよう．

さて，仮想のトラックであっても，実際のトラックに載せる「りんご」が 0［個］のときであっても，結果的に【状態】の数値は，0 であって区別できないことは言うまでもない．
従って，少なくとも

$$\frac{0[\text{個}]}{0[\text{回}]} = \frac{0[\text{個}]}{1[\text{回}]} = 0\frac{[\text{個}]}{[\text{回}]} = 0[\text{個}/\text{回}] \qquad (6)$$

が成り立つ．
このとき，【事象】と【結果】がどうなるかを考える．【事象】としては，一見すると何度でも運送回数を重ねることも出来そうである．つまり，Nを非負整数として，

$$\text{【事象】} = N[\text{回}] \qquad (7)$$

と表すことが出来，これを用いると，(1)式と(6)式から

$$0[\text{個}/\text{回}] \times N[\text{回}] = 0[\text{個}] \qquad (N = 0,1,2,3,\cdots) \qquad (8)$$

と表される．ところが，(8)式のNに，順次 0, 1, 2, 3, ･･･を代入したものを並べると，

$$0[\text{個}/\text{回}] \times 0[\text{回}] = 0[\text{個}]$$
$$0[\text{個}/\text{回}] \times 1[\text{回}] = 0[\text{個}]$$
$$0[\text{個}/\text{回}] \times 2[\text{回}] = 0[\text{個}]$$
$$0[\text{個}/\text{回}] \times 3[\text{回}] = 0[\text{個}]$$
$$\vdots$$

であって，

$$0[\text{個}/\text{回}] \times 0[\text{回}] = 0[\text{個}/\text{回}] \times 1[\text{回}] = 0[\text{個}/\text{回}] \times 2[\text{回}] = 0[\text{個}/\text{回}] \times 3[\text{回}] = \cdots = 0[\text{個}]$$

が成り立ち，これらは何れも同値であることは明かである．このことは，⟨*被乗数*⟩が 0 であるとき，⟨*乗数*⟩が如何なる値であっても【結果】としての⟨*積*⟩は，同値であるという事実を述べている．更には，これは，この同値性のみならず，【状態】が，$0[\text{個}/\text{回}]$であるならば，何度運送しようとも全く運んでいないことと区別を付けることが本質的に事実上出来ないのであって，”何度も運んだ”ということと”全く運んでいない”即ち，”$0[\text{回}]$”の運送とが等しく，同値であるという事実を述べていると言える．この事実は，”⟨*被乗数*⟩を一定の値に固定しておきながら，⟨*乗数*⟩を或る複数の値とした際の，それぞれの【結果】としての⟨*積*⟩が互いに等しいならば，それら複数の⟨*乗数*⟩どうしは，互いに等しい”という述語に一般化出来る．つまり，

$$a \times b_1 = c$$
$$a \times b_2 = c$$
$$a \times b_3 = c$$
$$\vdots$$
$$a \times b_n = c$$
$$\Rightarrow \quad b_1 = b_2 = b_3 = \cdots = b_n$$

が成り立ち，特に，$a = 0$のとき，$b_n \equiv 0$が成り立つのである．ここに，$p \equiv q$は，pとqが互いに同値であるという意味であり，この一連のことを整理して，

$$a \times b_1 = c \wedge a \times b_2 = c \Rightarrow b_1 \equiv b_2 \quad \text{if:} a = 0 \Rightarrow b_1 \equiv b_2 \equiv 0 \qquad (9)$$

と表すことが出来る．このことは，定理というよりも公理に分類されるべきモノである．そこで，上記 if 以左に示す部分を,”乗数同値性公理”と呼び，if 以右に示す部分を,”非負最小同値性原理”又は”ゼロ同値性公理”と呼ぶものとする．

このゼロ同値性公理は,”運ぶものがゼロならば，何度運ぼうとも結果はゼロであって，全く運んでいないこと, 即ち運んだ回数はゼロに等しい.”ということを述べている. 従って, (8) 式のNに如何なる数値を代入しようとも,

$$N \equiv 0 \qquad (N = 0,1,2,3,\cdots) \qquad (10)$$

が成り立つ．特に(8)式のようなケースでは，矛盾しているという誤解や他に転用するという間違いから， 乗数に添え字を付して,

$$\langle \textit{被乗数} \rangle a \times \langle \textit{乗数} \rangle b_a = \langle \textit{積} \rangle c \qquad \left(b_a = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ |R| & (a \neq 0) \end{cases} \right) \qquad (11)$$

また，例えば，代入される数値に添え字を付して,

$$b_0 \Rightarrow 0 = 1_0 = 2_0 = 3_0 \cdots \qquad (12)$$

とすれば，これまでの積年の誤解や今後の誤用を回避することが出来るであろう．

ところで，ここで，次の定義の下に公理Ⅱを導入しよう．

定義　$a \times b := \underbrace{+a + a + a \cdots + a}_{b\text{回加算}} \quad (a, b \in |\mathrm{R}|) \qquad (13)$

公理Ⅱ　$a \times b = c \Leftrightarrow c \div a = b \text{ or } \frac{c}{a} = b \quad (a, b, c \in |\mathrm{R}|) \qquad (14)$

$a = 0$とすると定義より，明らかに,

$$0 \times b = 0 \quad (b \in |\mathrm{R}|) \qquad (15)$$

が成り立つ．ここで，公理Ⅱより,

$$b = \frac{c}{a} = \frac{0}{0} \quad (b \in |\mathrm{R}|) \qquad (16)$$

であって，いま，$b (b \in |\mathrm{R}|)$であって，bの値は任意であり，$b = 1$とおいても，$b = 2$とおいてもよいから,

$$0 \times 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{0}{0} = 1 \qquad (17)$$

が成り立ち，他方で,

$$0 \times 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{0}{0} = 2 \qquad (18)$$

が成り立つことになる．すると，(17)式と(18)式とから,

$$1 = \frac{0}{0} = 2$$

$$\therefore \quad 1 = 2 \qquad (19)$$

という一見すると矛盾するかのような結果を得る．

ところが，ここで，$a, b_1, b_2, c \in |\mathrm{R}|$ として，次の公理Ⅰ，即ち，

公理Ⅰ　$a \times b_1 = c \wedge a \times b_2 = c \Rightarrow b_1 \equiv b_2 \quad \text{if:} a = 0 \Rightarrow b_1 \equiv b_2 \equiv 0 \qquad (20)$

を導入すると，(17)式の$\langle$*乗数*$\rangle$ 1，並びに(18)式の$\langle$*乗数*$\rangle$ 2と(19)式は明らかに，

$$0 \equiv 1 \equiv 2 \qquad (21)$$

と改められ，全く矛盾しない結果が得られることが示される．

また，このことから，(13)式，(14)式において，$a = 0$とすると，

$$0 \times x = 0 \Leftrightarrow \frac{0}{0} = x \equiv 0 \qquad (23)$$

即ち，

$$\frac{0}{0} = 0 \qquad (24)$$

を得る．これらの関係を加味すると，一般に，

$$\langle \textit{被乗数} \rangle a \times \langle \textit{乗数} \rangle b_a = \langle \textit{積} \rangle c \Leftrightarrow \frac{\langle \textit{被除数} \rangle c}{\langle \textit{除数} \rangle a} = \langle \textit{商} \rangle b_a \qquad \left(b_a = \begin{cases} 0 & (a = 0) \\ |R| & (a \neq 0) \end{cases} \right) \qquad (25)$$

が言える．これは，乗算と除算の対応関係として，

$$\langle \textit{被乗数} \rangle \Leftrightarrow \langle \textit{除数} \rangle$$
$$\langle \textit{乗数} \rangle \Leftrightarrow \langle \textit{商} \rangle$$
$$\langle \textit{積} \rangle \Leftrightarrow \langle \textit{被除数} \rangle$$

という逆関係が成り立つことを意味している．また上記の通り，乗算における$\langle$*乗数*$\rangle$が除算における$\langle$*商*$\rangle$に対応しているという逆関係から，$\langle$*被乗数*$\rangle$0に対する$\langle$*乗数*$\rangle N$にあっては，乗算における N と 0 の同値性（ゼロ同値性公理）から，これが逆演算である除算においても保存され，$\langle$*乗数*$\rangle N$の逆として対応している$\langle$*商*$\rangle N$もまた 0 と同値になるということを意味している．つまり，ゼロ同値性公理は，乗算の逆演算である除算においても保存されると言える．勿論，除算におけるゼロ同値性公理は，除算の逆演算である乗算においても保存されると言える．以上によって，非負最小同値性原理の逆演算における保存法則が成り立っているということが示された．