2018.6.3

Hiroshi Michiwaki

道脇　裕

100×0＝0の真の意味
～ゼロ乗算とゼロ除算～

20 世紀までの数学は，より高度な抽象化を目指したモノであった．これは，抽象数学とも呼ばれる．その起源は悠久の太古にあったと言っても過言ではないであろう．人類は，おそらく文字を発明するより前に数記号を発明して多用していたに違いない．狩りに出かけてから今日で何日経ったのか？石板か粘土板，或いは棒っ切れの表面に“|”を刻み込んで 1 日経ったことを記録したであろう．２日目，３日目と“|”の刻み数量を増やして行き，４日目には“||||”と表記したことであろう．５日目の記述には，工夫が成されたであろう．それは，“|||||”との記述は瞬時にそれが“5”の概念に対応しているか否かを判別しづらいからであり，“4”の対応記号，即ち“||||”に対して“――”という横串を通して成る“~~||||~~”や“~~||||~~”等のように表記し，“|||||”の視認性を高める記号化を図っていたであろうことは想像に難くない．この表記法の初めは，両手の５指を駆使して猪，羊の頭数等を数え，１０頭を超えた辺りから石コロの数と対応させて計数を行っていたところから発展したと考えられ，５つ区切りでカウントして行くところから来たのだろう．この頃の数表記は，1 つのモノゴトに対して，1 本の縦棒線又は横棒線を対応させ，モノゴトの数量が増加する度に，対応する棒線の数量を増やして表記するという謂わば 1 対 1 対応の表記方法を採ったことであろう．面白いことに，この考えによれば，数概念と計数概念とは，ほぼ同時に生まれていたと考えられる．つまり，抽象化が既に成されていたことになるのである．それはどういうことか．本来，猪３頭と羊 3 頭とでは，意味合いが全く異なる．前者は，食肉用の対象であり，後者は羊乳や羊毛の獲得を対象としたものであり，これらの“頭数”をごちゃ混ぜに管理すると生活に混乱を来すことになる．そこで，猪を表す記号“🐗”と，羊を表す記号“🐑”を用いて，🐗|||や🐑~~||||~~のように表記して管理していたと想像される．これは，勿論，猪が 3 頭で，羊が 5 頭であることを意味している訳であるが，単位の発明でもある訳である．頭数を単位としているどころか，猪の頭数単位と羊の頭数単位を使い分けていることに相当するものである．そして，更に，それらの頭数を左手の 3 本指で猪の頭数を，右手の 5 本指で羊の頭数を表したとすると，頭数と指の本数の対応を図り，単位を外して，数概念だけを取り出して計数するという抽象化を行っていることになるのである．そして，その指の本数との対応関係は，記述と記録が可能な上記の如くの表記法に発展し，記述した記号と実在の頭数との対応関係を付けるという抽象化を行ったのである．こうして，数と計数とその記号化，更に抽象化という人類の記号化や数学の歴史は，文字の使用よりも前に，必然的に自然発生的に始まったのである．1 個，2 個，･･･と数えられた単位付きの数概念から単位を外して，数概念そのモノに着目

して，1，2，･･･に抽象化を図り，やがてそれは有理数や無理数を含んだ実数へ，実数から複素数へ，代数的数から超越数へと高度に抽象化され，環や体，群等の構造へ，そして位相空間へと飛躍して来た．この抽象化の道こそが数学の発展の歴史であり，事実，多くの実りを得た．しかし，どのような抽象化による発展があっても原型や起源との矛盾があってはならないのは言うまでもない．原理原則と相反するようでは，その抽象化は正しいとは認められない．

1[個]のリンゴを 0[人]で分けるとは，1[個]のリンゴを“分けない”ことに他ならず，当然，分け前は 0[個]であり，元々有ったその 1[個]のリンゴはそのまま 1[個]残っている，つまり残りに着目すれば，それは余り 1[個]となるのは至極当然であり，自然であり，当たり前である．これに対して，より高度な数学思想である極限の思想を持ち込んで，

$$\lim_{x\to 0}\frac{1[\text{個}]}{x[\text{人}]}=\infty[\text{個}/\text{人}]$$

とするなど以ての外である．誰にも分けないことで，りんごの個数は際限無く増え続けるなどということは起こり得ないのである．りんごを構成する分子や原子の個数も有限で或る．りんご 1 個は，概ね 300g であって，その約 84%が水であることを勘案すると，分子レベルまで小分けしても高々$14\times 6.02\times 10^{23}$[個]程度の分子数しかないのであり，決して無限大とはならない．

さて，筆者は近年，人類の数学の発展過程の逆を行くことで，数学の根底の高度化を図って来た．それは取りも直さず，抽象化の逆，即ち，具象化を数学に施したことによるものである．それは，或る意味では具象化ならず愚小化とも言われるものなのかも知れない．しかし，そこには原理原則に対する確かなる手触り感があり，高度な数学知識の無い誰もが理解可能で納得感があることも，何人も否定できないであろう．

そこで，人類の誰もが目にして来た初等演算であるにも関わらず，その誰もが気が付くことのなかった，次の乗算を例に，愚小化による効用を見て行くこととしよう．その対象となる乗算は，

$$100\times 0=0 \qquad (1)$$

である．この意味は，具象化した述語に変換すると，とても解り易い．そこで，それぞれに適当な単位を与えて，具象化式とするのである．例えば，(1)式を，

$$100[\text{個}/\text{皿}]\times 0[\text{皿}]=0[\text{個}] \qquad (2)$$

の様に変換するのである．この(2)式の両辺に，それぞれ述語化する変化を加え，

左辺：100[個]のリンゴが乗っているというお皿が 0[皿]有る (3)

右辺：この系には全部でリンゴが 0[個]有る (4)

となる．(3)式と(4)式としての両辺を合わせると，

100[個]のリンゴが乗っているお皿が 0[皿]有るが，この系に全部でリンゴは 0[個]有る(5)

となる．そこで，(5)式の表現の同値変換を施すと，

$$100[\text{個}]\text{のリンゴが乗っているお皿は無いが，この系に全部でリンゴは }0[\text{個}]\text{有る} \quad (6)$$

と記述できる．つまり，この同値変換は，

$$0[\text{皿}]\text{有る} = \text{無い} \qquad (7)$$

という恒等変換に依拠している．これは，×0［皿］という演算が，被乗数(100［個/皿］)の存在を否定する述語であることを意味する．

更に，(2)式左辺の述語化を別の表現に同値変換することを考えると，

$$\text{お皿に }100[\text{個}]\text{のリンゴが乗っているというモノ（状態）は無い} \qquad (8)$$

と記述可能であり，(4)式を勘案すると，この系には(8)式のような“状態が無い”だけでなく，この系にはそもそも“リンゴは 1［個］も無い”，即ち，“リンゴは無い”のであるから，(4)式と(8)式を勘案すると，

$$\text{お皿に乗っている }100[\text{個}]\text{のリンゴは，無い} \qquad (9)$$

と主張しているのであって，リンゴの存在自体が否定されていることになるのである．そして，(9)式を注意深く観ると，“100［個］のリンゴが無い”ばかりか，“リンゴは無い”のであるから，(9)式は，

$$\text{お皿に乗っているリンゴは，無い} \qquad (10)$$

と同値なのである．このことは，被乗数である N の値は幾つと置いてもよいが，幾つと置いたとしてもそれは 0 に同値である，ということを意味していたのである．それは，つまり，

$$N \equiv 0 \qquad (11)$$

を意味しているのである．この意味で，×0 は被乗数の否定を意味する役割を発揮するモノであることが解るが，他方でこのような意味を持つ実乗数は他に存在しないことも解る．

正の実乗数は被乗数の存在を肯定し，負の実乗数は被乗数の存在を正の被乗数と逆向きに存在を肯定する．つまり，正実乗数であっても負実乗数であっても絶対値として被乗数の存在を肯定する．しかし，非正負の乗数即ち，×0 だけは被乗数の存在を完全に否定しているのである．

よって，(1)式は，

$$0 \times 0 = 0 \qquad (12)$$

と同値なのである．ここで，(1)式の逆演算が成り立つと仮定するならば，その逆演算としての，

$$\frac{0}{100} = 0 \qquad (13)$$

及び，

$$\frac{0}{0} = 100 \qquad (14)$$

は，それぞれ(11)式の関係から，(13)式並びに(14)式は何れも

$$\frac{0}{0} = 0 \qquad (15)$$

と同値であるといえて，0/0 は一意に 0 に等しくなるのであって，不定にはならないといえる．

また，

$$N \times 0 = 0 \qquad (16)$$

は，

$$N\text{は無い，よって } 0 \text{ に等しい} \qquad (17)$$

のように表される同値の述語化が可能であり，これは，“0 が乗じられると，乗じられた側の存在，即ち被乗数はその存在自体が否定されることになり，存在していない”ことを意味していたのである．