2020.10.26
Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

座標空間上の直線とゼロ除算

x-y 座標空間上における直線 C の方程式は，傾きを a，y 切片を b とおけば，

$$y = ax + b \qquad (1)$$

と表される．ここで，直線 C 上の異なる 2 点を $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$とすると，傾き a は，

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \qquad (2)$$

と表され，y 切片 b は，

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_1 = y_2 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x_2 \qquad (3)$$

と表される．従って，(2)式並びに(3)式を(1)式に代入して整理することにより，直線 C の方程式

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1,\ \ y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2) + y_2 \qquad (4)$$

を得る．さて，従来の非ゼロ除算数学では，(4)式においては$x_1 \neq x_2$のみが適用され，$x_1 = x_2$の条件の場合にあっては，

$$x = x_1 \qquad (5)$$

と唐突に例外的な数式が与えられる．これは，直線 C が y 軸と平行となって，その際の傾き a を表す(2)式の分母が 0 となってゼロ除算が発生し，その値が発散して計算不能に陥るとされて来た事による．ところが，(4)式において，ゼロ除算を包含して自然な形で拡張されたゼロ除算数学を導入してゼロ除算算法を適用すると，$x_1 = x_2$のとき直線 C 上の任意の点$P_j(x_j, y_j)$において，$x_j = x_1$となることを勘案することで左式は，

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1}(x_1 - x_1) + y_1 = \frac{(y_2 - y_1) \times 0}{0} + y_1 = \frac{0}{0} + y_1 = y_1 \qquad (6)$$

が得られ，同様に(4)式の右式の関係から，

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) + y_2 = y_2 \qquad (7)$$

を得る．一般に，直線 C 上の異なる任意の 2 点を，$P_j(x_j, y_j)$，点$P_k(x_k, y_k)$と置けば，直線 C の方程式は，(4)式と同様に，

$$y = \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j}(x - x_j) + y_j,\ \ y = \frac{y_k - y_j}{x_k - x_j}(x - x_k) + y_k \qquad (8)$$

と表され，$x_j = x_k$のとき，即ち，直線 C が y 軸と平行である場合，

$$y = y_j \wedge y = y_k \quad (y_j \neq y_k) \qquad (9)$$

を得るが，ここで y_j 並びに y_k がそれぞれ直線 C 上の任意の 2 点$\mathrm{P}_j(x_j, y_j)$，点$\mathrm{P}_k(x_j, y_k)$の y 座標であることを考慮すれば，(9)式における y_j 並びに y_k は直線 C 上の全ての y 座標にわたるものであることが判る．つまり，y_{C}を直線 C 上の全ての y 座標集合であるとすると，(9)式は，

$$y = y_{\mathrm{C}} \quad (x_j = x_k) \qquad (10)$$

と置くことが出来る．従って，x-y 座標空間上においての y 軸と平行な直線を含む全ての直線 C について何らの矛盾もなく，(8)式で表される直線 C の方程式を適用して正しく計算結果を得る事が出来ることが示された．

ところで，$x_1 = x_2$のときの傾き a が，$y_1 \neq y_2$であることを考慮しつつ，(2)式にゼロ除算算法を適用することで，

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{0} = (y_2 - y_1) \times 0 = 0 \qquad (11)$$

を得る．つまり，y 軸と平行な直線 C の傾き a は 0 であることが判る．

他方，$x_1 = x_2$のときの傾き a が 0 であることを考慮しつつ，(3)式にゼロ除算算法を適用して y 切片を求めると，

$$b = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} x_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_1} x_1 = y_1 - \frac{y_2 - y_1}{0} x_1 = y_1 - (y_2 - y_1) x_1 \times 0 = y_1 \qquad (12)$$

と求められるが，(8)式及び(10)式の関係を加味すると，(12)式は，

$$b = y_{\mathrm{C}} \quad (x_j = x_k) \qquad (13)$$

と表される．但し，ここで，y_{C}は直線 C 上の全ての y 座標集合である．

この結果は，$x_j \neq 0$である場合の直線 C は y 軸から離れているにも拘わらず，y 切片 b の値が存在することになってしまうが，これは一見すると矛盾のように感じられる．しかしながら，この矛盾のように感じさせるものは本質的なものではない．何故なら，(1)式で与えられる直線の方程式において，x＝0 即ち，y 軸を切り交わる点の y 座標という条件の元に名付けられたものこそが y 切片なのであって，そもそも$x_j \neq 0$を仮定しているのであるから，x＝0 という条件を与えることは明らかに矛盾しているのであり，y 切片なる概念は必ずしも直線 C が y 軸と切り交わるとは限らない直線が存在することが含まれていない概念なのである．従って，$x \neq 0$の y 軸と平行な直線 C にあっては y 切片なる概念は存在せず，b は単にその直線 C の y 座標を表しているに過ぎないことは明かである．

以上より，直線の方程式にゼロ除算算法を導入しても何等の矛盾も発生しないことが明かであることが示された．この結果は，寧ろ従来の非ゼロ除算数学における唐突に現れる(5)式の関係のような断絶的な関係性が改善され，1 つの統一された方程式で全てのケースを正しく表現できるという極めて美しい形で拡張されていることを示しているといえる．