2014.12.27

Hiroshi Michiwaki
道脇　裕

距離と角度の基礎付けとゼロ除算

定理１　半径集合 R，弧長集合 A を用い，除算 A/R によって角度集合 Θ が規定されるとき

$$\Theta = \frac{A}{R} = \frac{0}{0} = 0$$

が成り立つ．

定理２　回転体の中心は回転しない．

証明　全ての集合 X は，空集合$\emptyset$を含む，即ち

$$X \supseteq \emptyset \qquad (1)$$

である．従って，半径集合 R は，R の元 r を，$\{r \in R | 0 < r\}$ として用いれば，

$$R = \{r\} \cup \emptyset_R \qquad (2)$$

である．ただし，$\exists \emptyset_R \forall r \{r \notin \emptyset_R | 0 < r\}$ である．同様に，弧長集合 A は，A の元 a を，$\{a \in A | 0 < a \leq 2\pi r\}$として，

$$A = \{a\} \cup \emptyset_A \qquad (3)$$

が成り立つ．ただし，$\exists \emptyset_A \forall a \{a \notin \emptyset_A | 0 < a \leq 2\pi r\}$ であって，π は円周率である．ここで，半径集合 R が固定されていれば，弧長集合 A を角度集合 Θ に写す写像 f を考えると，

$$f: A \to \Theta \qquad (4)$$

であって，明らかに全単射を成す．なぜならば，弧長集合 A は(3)式を満たす．一方，角度集合 Θ は，角度集合 Θ の元 θ が$\{\theta \in \Theta | 0 < \theta \leq 2\pi\}$ならば，(1)式より，

$$\Theta = \{\theta\} \cup \emptyset_\Theta \qquad (5)$$

が成り立つ．ここで，$\exists \emptyset_\Theta \forall \theta \{\theta \notin \emptyset_\Theta | 0 < \theta \leq 2\pi\}$ である．このとき，

$$f: a \to \theta \qquad (6)$$

は，明らかに全単射である．他方，弧長集合 A が空$\emptyset_A$ならば，明らかに角度集合 Θ も空$\emptyset_\Theta$となり，逆も成り立つ．即ち，全単射として

$$f: \emptyset_A \to \emptyset_\Theta \qquad (7)$$

が成り立ち，従って，

$$f: \{a\} \cup \emptyset_A \to \{\theta\} \cup \emptyset_\Theta$$
$$\therefore \quad f: A \to \Theta \qquad (8)$$

は全単射を成す．

　他方，弧長集合 A が固定されていれば，半径集合 R を角度集合 Θ に移す写像gを考えると，

$$g: R \to \Theta \qquad (9)$$

であって，この写像は明らかに全単射ではない．これを以下に示す．

先ず，半径集合 R は(2)式を満たす．一方，角度集合 Θ は，(5)式を前提とすれば，

$$g: r \to \theta \qquad (10)$$

は，明らかに全単射である．ところが，いま，弧長集合 A が空$\emptyset_A$で固定されているとき，(7)式より，角度集合 Θ も空$\emptyset_\Theta$となることから，

$$g: \emptyset_R \to \emptyset_\Theta \qquad (11)$$

が成り立つと仮定すると，その一方で，写像gの逆写像g^{-1}

$$g^{-1}: \emptyset_\Theta \to \emptyset_R \qquad (12)$$

は，一般には成り立たない．即ち，(11)式は単射である．従って，(9)式は全単射ではない．

ここで，(11)式が成り立つことは仮定であった．そこで，(11)式が成り立つことを以下に示す．半径集合 R を成す直線が基準線 B 上に在れば，基準点 O は共有されているから定義より，$\Theta = \emptyset_\Theta = 0$ は明かである．ここで，半径 R が 0 であったとすると，明らかに半径集合 R＝$\emptyset_R$＝0 である．ここに，空$\emptyset$＝0 の対応は，一般的な集合の標準的定義による．

さて，半径集合 R が 0 即ち空$\emptyset_R$であったとしても，半径集合 R は基準線 L 上の基準点 O を共有し，このとき，明らかに弧長集合 A は空$\emptyset_A$となる．つまり，写像 h に対して，

$$h: \emptyset_R \to \emptyset_A \qquad (13)$$

は成り立つが，

$$h^{-1}: \emptyset_A \to \emptyset_R \qquad (14)$$

は成り立たない．他方，(13)式の単射性と(8)式に示す全単射性の関係から，

$$\emptyset_R \to \emptyset_A \to \emptyset_\Theta \qquad (15)$$

が成り立つ．ゆえに，(11)式の単射性が成り立つと言える．

ところで，定義より，半径集合 R と弧長集合 A との比によって角度集合 Θ が

$$\Theta = \frac{A}{R} \qquad (16)$$

と規定されるから(15)式を(16)式に適用すると，

$$\Theta = \frac{A}{R} = \frac{0}{0} = 0 \qquad (17)$$

を得る．以上によって定理 1 が証明された．

さて，半径 R 一定として(16)式の両辺を時間 t で微分すると，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Theta = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}A \qquad (18)$$

と表される．ここで，左辺は角速度 ω を意味し，右辺の微分形は接線速度 v を意味するからこれらで置き換えると上式は，

$$\omega = \frac{v}{R} \qquad (19)$$

と表される．(19)式は，回転体の半径 R と接線速度 v と角速度 ω の関係を表しているが，(17)式の関係から明らかに，R＝0 のとき，角速度 ω＝0 となって，回転体の中心は回転しないことがわかる．以上によって定理 2 が証明された．□